ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΟΝΟ ΣΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ :

1) ο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>' = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$$

i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένου με το 2ο εσωτερικό γινόμενο

ii) ΝΔΟ η $T: \mathbb{R}^3(\text{κανονικό}) \to \mathbb{R}^3(\text{νέο})$ με τύπο

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right)$$ ορίζει ισομετρία

ΛΥΣΗ

i) G-S στον $\mathbb{R}^3$ με το $<-,->'$

Έστω $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$e_1 = (1,0,0)$

$$e_2 = (0,1,0) - \cancel{\frac{<(0,1,0),(1,0,0)>'}{<(1,0,0),(1,0,0)>'}}^{\,0}(1,0,0) = (0,1,0)$$

$$e_3 = (0,0,1) - \cancel{\frac{<(0,0,1),(0,1,0)>'}{<(0,1,0),(0,1,0)>'}}^{\,0}(0,1,0) - \cancel{\frac{<(0,0,1),(1,0,0)>'}{<(1,0,0),(1,0,0)>'}}^{\,0}(1,0,0)$$

$= (0,0,1)$ Έτυχε η ορθογώνια βάση να 'ναι η E

κανονικοποιούμε

$$\left.\begin{aligned}
&\cdot\ \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{e_1}{<e_1,e_1>'} = \frac{(1,0,0)}{2} = \left(\frac{1}{2},0,0\right)\\
&\cdot\ \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{e_2}{<e_2,e_2>'} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\\
&\cdot\ \frac{e_3}{\|e_3\|} = \frac{e_3}{<e_3,e_3>'} = \frac{(0,0,1)}{2\sqrt{2}} = \left(0,0,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}\right\}$$

άρα θα αποτελούν την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

ii) Εξετάσατε αν η T ισομετρία.

α' τρόπος

Μέσω του ορισμού'

αρκεί $<T(v), T(u)> = <v, u>$

αν $v=(\alpha, \beta, \gamma)$ και $u=(\alpha', \beta', \gamma')$

$$<v, u> = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

αλλά $<T(v), T(u)> = <\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{\sqrt{2}}, \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha'}{2}, \frac{\beta'}{\sqrt{2}}, \frac{\gamma'}{2\sqrt{2}}\right)>' =$

$$= 4\frac{\alpha\alpha'}{4} + 2\frac{\beta\beta'}{2} + 8\frac{\gamma\gamma'}{8} = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \text{ ισομετρία.}$$

β' τρόπος

βρίσκω τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις που δίνονται

$$E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ T(0,1,0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ T(0,0,1) = \left(0, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\} M_E^E(T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

αν ο $M_E^E(T)$ ορθογώνιος τότε T ισομετρία.

$$M_E^E(T) \cdot M_E^E(T)^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = I_3$$

ορθογώνιος !!!

(Ευκόλως επίσης βλέπουμε ότι $\boxed{M_E^E(T) = M_E^E(T)^t}$)